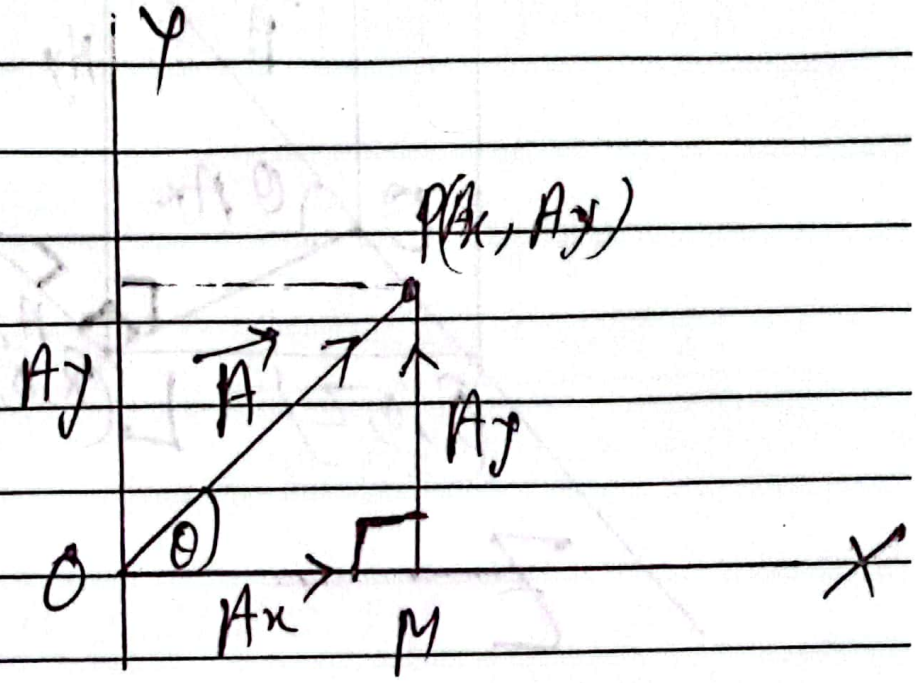
দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ভেক্টর প্রকাশ



X অক্ষ বরাবর $\vec{A}$ এর উপাংশ (স্কেলার) $= A_x$

Y " " $\vec{A}$ " " " $= A_y$.

ΔOPM এ $\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP}$

$\vec{A} = \vec{A_x} + \vec{A_y}$

$\Rightarrow \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$ [X ও Y অক্ষ বরাবর অবস্থিত একক ভেক্টর $\hat{i}, \hat{j}$]

আবার, $OP^2 = OM^2 + MP^2$

$|\vec{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2$

$\Rightarrow A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ *

$\theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x}$

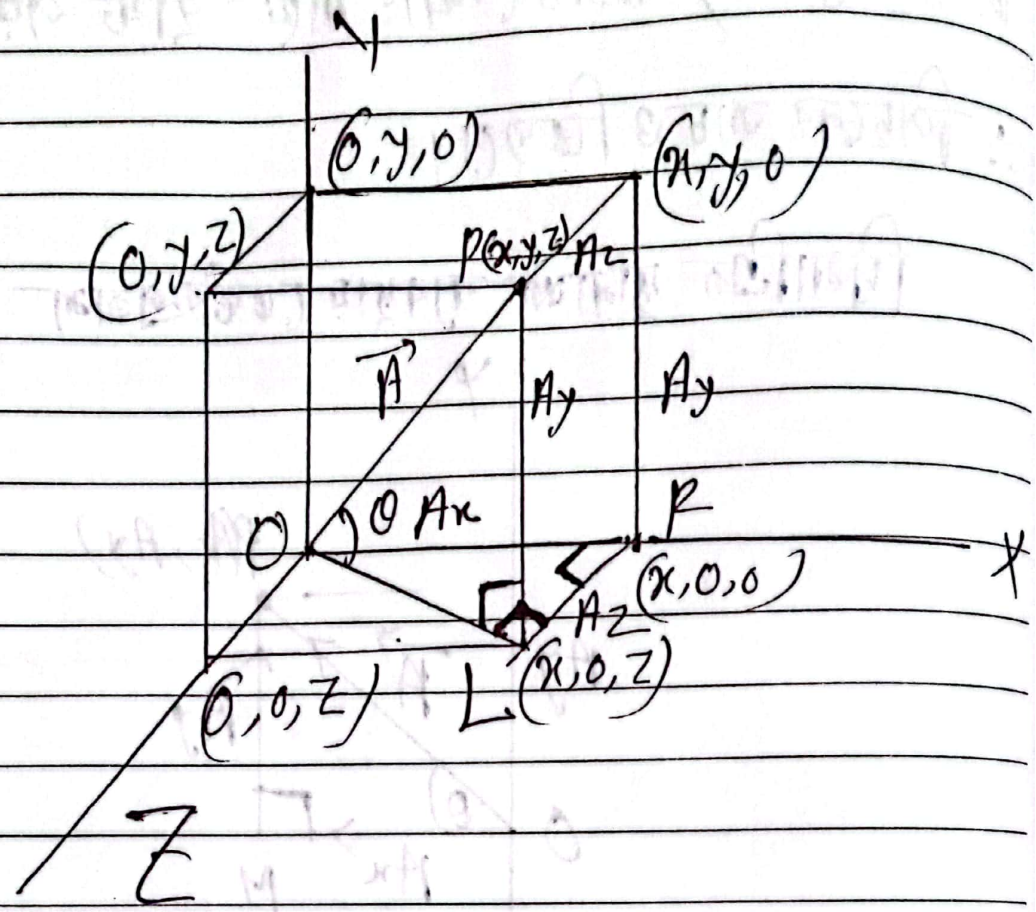
$\vec{A}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর, $\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x\hat{i} + A_y\hat{j}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}}$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ভেক্টর প্রকাশ



X অক্ষ বরাবর $\vec{A}$ এর উপাংশ = A_x

Y " " $\vec{A}$ " " = A_y

Z " " $\vec{A}$ " " = A_z

$\triangle OLR$ এ $\angle ORL = 90°$

$\therefore OL^2 = OR^2 + RL^2$

$= A_x^2 + A_z^2$

$\Rightarrow OL = \sqrt{A_x^2 + A_z^2}$

$\triangle OPL$ এ $\angle OLP = 90°$

$\therefore OP^2 = OL^2 + PL^2$

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

$\Rightarrow |\vec{A}|^2 = A_x^2 + A_z^2 + A_y^2$

$\Rightarrow A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

$\because$ x, y, z অক্ষ বরাবর আয়তএকক ভেক্টর গুলো যথাক্রমে $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ তাই

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$\vec{A}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর, $\vec{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

আবার, ΔOPL এ $\angle OLP = 90^\circ$

$$\therefore \tan\theta = \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_z^2}}$$

x−z তলের সাথে উৎপন্ন কোণ, $\theta_1 = \tan^{-1}\frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_z^2}}$

y−z " " " " $\theta_2 = \tan^{-1}\frac{A_x}{\sqrt{A_z^2 + A_y^2}}$

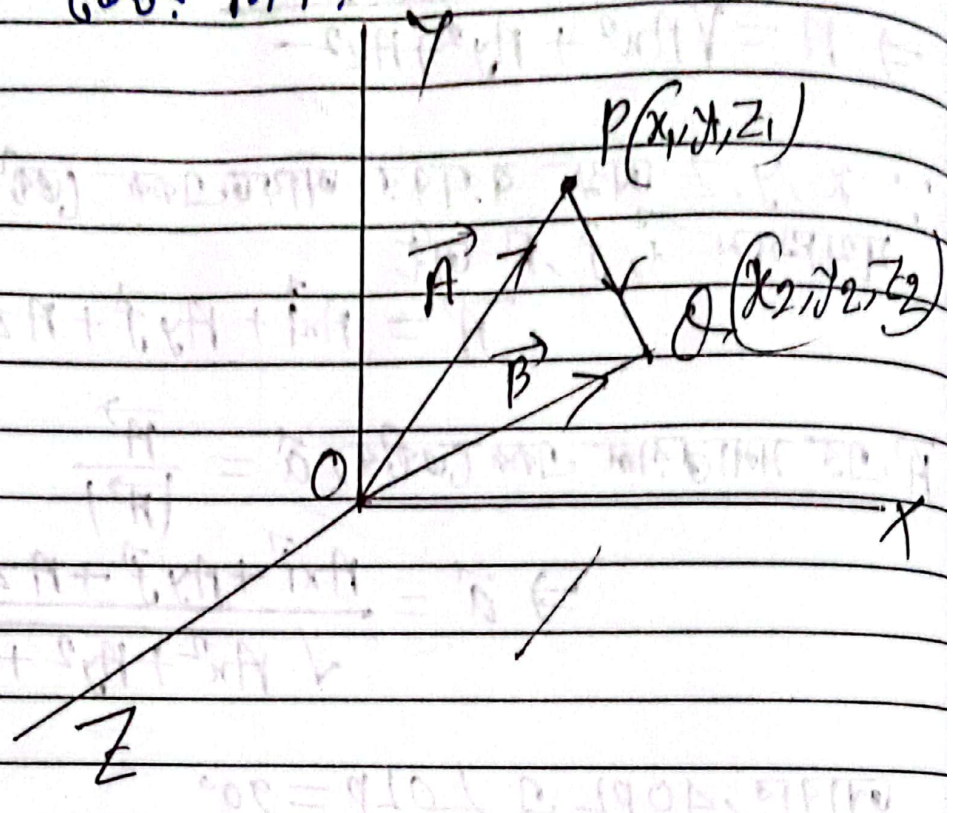
x−y " " " " $\theta_3 = \tan^{-1}\frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}}$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

দুটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর থেকে কোনো ভেক্টর নির্ণয়



P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{A} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$

Q " " " $\vec{B} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$

$\triangle OPQ$ এ

$$\vec{OP} + \vec{PQ} = \vec{OQ}$$

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$$

$$= x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k} - x_1\hat{i} - y_1\hat{j} - z_1\hat{k}$$

$$* \Rightarrow \vec{PQ} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Technique: প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক থেকে আদিবিন্দু বিয়োগ

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

সমস্যা ও সমাধান

Pbm→01: দুটির বিন্দুর অবস্থান যথাক্রমে P(1,2,3) এবং Q(3,3,4)।

(i) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর।
(ii) $\vec{PQ}$ ভেক্টর এবং এর মান নির্ণয় কর।
(iii) $\vec{PQ}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।
(iv) $\vec{PQ}$ ভেক্টরের সাথে তিনটি অক্ষের কোণ নির্ণয় কর।

Solution

(i) P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$
Q " " " , $\vec{B} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

(ii) $\vec{PQ} = (3-1)\hat{i} + (3-2)\hat{j} + (4-3)\hat{k}$

$\Rightarrow \vec{PQ} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

এবং $|\vec{PQ}| = \sqrt{2^2+1^2+1^2}$
$PQ = \sqrt{6}$

(iii) $\vec{PQ}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর, $\hat{a} = \frac{\vec{PQ}}{|\vec{PQ}|}$

$$\hat{a} = \frac{2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{6}}$$

(iv) X-Y অক্ষের সাথে $\vec{PQ}$ এর উৎপন্ন কোণ,

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}} = 24.09^\circ$$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

Y-Z তলের সাথে PQ এর উৎপন্ন কোণ

$$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\theta_2 = 54.73^\circ$$

X-Z তলের সাথে PQ এর উৎপন্ন কোণ

$$\theta_3 = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$\Rightarrow \theta_3 = 24.09^\circ$$

Pbm→02: $\vec{A} = 9\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

$3\vec{A} + \vec{B}$ এবং $2\vec{A} - 4\vec{B}$ নির্ণয় কর।

Soln: $3\vec{A} + \vec{B} = 9\hat{i} + 6\hat{j} + 12\hat{k} + 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

$= 11\hat{i} + 5\hat{j} + 15\hat{k}$

$2\vec{A} - 4\vec{B} = 6\hat{i} + 4\hat{j} + 8\hat{k} - 8\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k}$

$= -2\hat{i} + 8\hat{j} - 4\hat{k}$

Topic: ভেক্টর গুণন

(i) স্কেলার রাশির সাথে ভেক্টর রাশির গুণন

(ii) ভেক্টর রাশির সাথে ভেক্টর রাশির স্কেলার বা ডট গুণন।

JANANI

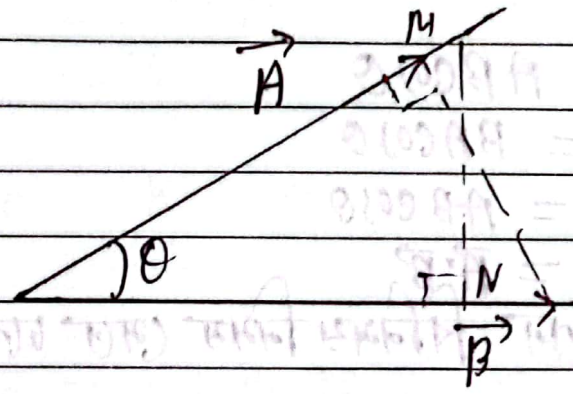
Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

(ii) ভেক্টর রাশির সাথে ভেক্টর রাশির ভেক্টর/ক্রস গুণন।

স্কেলার বা ডট গুণন

দুটি ভেক্টরের যে গুণনে একটি স্কেলার রাশি পাওয়া যায় এবং এর মান ভেক্টরদ্বয়ের মান এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণের cosine-এর গুণফলের সমান হয়, সে গুণকে স্কেলার বা ডট গুণন এবং গুণফলকে সে প্রক্রিয়াকে গুণফলকে স্কেলার গুণফল বলে।



স্কেলার গুণফল, $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

চিত্রে $\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর অভিক্ষেপ $= A\cos\theta$

$\vec{A}$ " " $\vec{B}$ " " $= B\cos\theta$

সুতরাং, যেকোনো দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণন বলতে বোঝায়, যেকোনো ভেক্টরের মান এবং ঐ ভেক্টরের উপর অপর ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপের মানের গুণফল।

বল $\vec{F}$, সরণ $\vec{S}$ ভেক্টরদ্বয়ের ডট গুণফল কাজ W একটি স্কেলার রাশি, $W = FS\cos\theta$.

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

স্কেলার গুণফলের কয়েকটি ধর্ম

(i) $\vec{A}\cdot\vec{A} = AA\cos 0$

$= A^2 \Rightarrow A = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} = \sqrt{}$

$\therefore \quad = |\vec{A}|^2$

অর্থাৎ, কোনো ভেক্টরকে ঐ ভেক্টর দ্বারা ডট গুণ করলে যে মান পাওয়া যায়, সেই ঐ ভেক্টরের মান।

তার বর্গমূল হল

(ii) $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

$\vec{B}\cdot\vec{A} = BA\cos\theta$

$= AB\cos\theta$

$= \vec{A}\cdot\vec{B}$

$\therefore$ স্কেলার গুণন বিনিময় নিয়ম মেনে চলে।

(iii) $\vec{A}\perp\vec{B}$ হলে $\theta = 90^\circ$

$\therefore \vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos 90^\circ$

$= 0$

$\vec{A} \neq \vec{0}$

$\vec{B} \neq 0$

$\therefore$ পরস্পর লম্ব দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল 0 হয়।

(iv) কোণ নির্ণয় :

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

(ঙ) আয়ত একক ভেক্টর সমূহের ক্ষেত্রে স্কেলার গুণফল :

$\hat{i} \wedge \hat{j} = 90^\circ$ $\quad (|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1)$

$\hat{j} \wedge \hat{k} = 90^\circ$

$\hat{i} \wedge \hat{k} = 90^\circ$ $\quad (i = j = k = 1)$

$\therefore \hat{i} \cdot \hat{i} = i^2 \cos 0$

$= i^2 = 1$

$\hat{j} \cdot \hat{j} = j^2 \cos 0$

$= 1$

$\hat{k} \cdot \hat{k} = k^2 \cos 0$

$= 1$

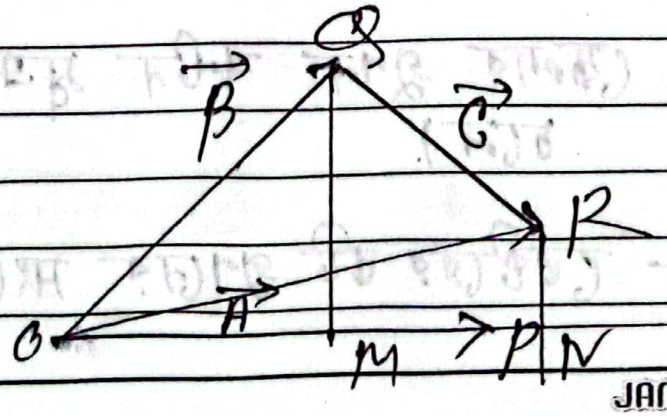
$\hat{i} \cdot \hat{j} = i \cdot j \cos 90^\circ = 0$

$\hat{j} \cdot \hat{k} = j \cdot k \cos 90^\circ = 0$

$\hat{i} \cdot \hat{k} = ik \cos 90^\circ = 0.$

(vi) $\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} = AB \cos\theta + AC \cos$

(vi)



JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

বণ্টন সূত্র : $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$

$$L.H.S = \vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})$$
$$= \vec{OP}\cdot(\vec{OQ}+\vec{QR})$$
$$= \vec{OP}\cdot\vec{OR}$$
$$= \vec{A}\cdot\vec{OR}$$

= A এর মান × $\vec{A}$ বরাবর OR এর লম্ব অভিক্ষেপ

$$= A(ON)$$
$$= A(OM+MN)$$
$$= A(OM) + A(MN)$$

= ($\vec{A}$ এর মান) ($\vec{A}$ বরাবর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ) + ($\vec{A}$ এর মান × $\vec{A}$ বরাবর $\vec{C}$ এর লম্ব

$$= \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$
$$= R.H.S.$$

∴ স্কেলার গুণন বণ্টন সূত্র মেনে চলে। *

* ভেক্টরের ভেক্টর গুণনের সংযোগ সূত্র হয় না।

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

(vii) $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

এখন, $\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$

$\Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x(\hat{i}\cdot\hat{i}) + A_xB_y(\hat{i}\cdot\hat{j}) + A_xB_z(\hat{i}\cdot\hat{k}) + A_yB_x(\hat{j}\cdot\hat{i}) + A_yB_y(\hat{j}\cdot\hat{j}) + A_yB_z(\hat{j}\cdot\hat{k}) + A_zB_x(\hat{k}\cdot\hat{i}) + A_zB_y(\hat{k}\cdot\hat{j}) + A_zB_z\,\hat{k}\cdot\hat{k}$

$\Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + 0 + 0 + 0 + A_yB_y + 0 + 0 + 0 + A_zB_z$

$\Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

★ দুটি ভেক্টর $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ এবং $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ হলে,

$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$.

(viii) $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ হলে

$\vec{A}\cdot\vec{A} = A_xA_x + A_yA_y + A_zA_z$

$\Rightarrow AA\cos 0^\circ = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$

$\Rightarrow A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$

$\Rightarrow A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ *

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

সমস্যা ও সমাধান

Pbm→01: $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

(i) $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ এর ডট গুণফল নির্ণয় কর।

(ii) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

Solⁿ: (i) $\vec{A}\cdot\vec{B} = 2\times1 + 1(-2) + 4\times3$

$= 2 - 2 + 12$

$= 12$

(ii) $|\vec{A}| = \sqrt{2^2+1^2+4^2}$

$A = \sqrt{21}$

$|\vec{B}| = \sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}$

$B = \sqrt{14}$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{12}{\sqrt{21}\sqrt{14}}$

$\Rightarrow \theta = 45.58°$

$\therefore \vec{A} \wedge \vec{B} = 45.58°$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

Pbm→02: $\vec{A} = 2\hat{i} + b\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ই পরস্পর লম্ব হলে $b = ?$

Solⁿ: $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর লম্ব হলে, $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

$\Rightarrow (2\hat{i} + b\hat{j} + 3\hat{k})\cdot(\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow 2 - 3b + 12 = 0$

$\Rightarrow 3b = 14$

$\Rightarrow b = 14/3$ (Ans.)

Pbm→03: $\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$

$\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$

দেখাও যে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব।

Solⁿ: $\vec{A}\cdot\vec{B} = (9\times4) + \{(-6)\times1\} + (-6)5$

$= 36 - 6 - 30$

$= 0$

$\because \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ তাই $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর লম্ব।

বিকল্প পদ্ধতি

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \quad [\vec{A}\wedge\vec{B} = \theta]$

$\Rightarrow 9\times4 + 1(-6) + 5(-6) = \sqrt{118}\cdot\sqrt{77}\cos\theta$

$\Rightarrow 36 - 6 - 30 = \sqrt{118}\cdot\sqrt{77}\cos\theta$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{0}{\sqrt{118\times77}} = \cos^{-1}0$

$\Rightarrow \theta = 90^\circ$ (Ans.)

JANANI

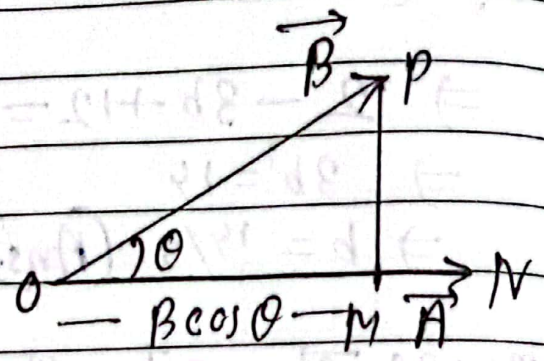
Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

Pbm→04: $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$
$\vec{B} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

(i) $\vec{A}$ বরাবর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।
(ii) $\vec{A}$ বরাবর $\vec{B}$ এর উপাংশ বা অংশক নির্ণয় কর।

Solⁿ: (i)



মনে করি, $\vec{A} \wedge \vec{B} = \theta$

$\vec{A}$ বরাবর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $= B\cos\theta$

$$= \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|} \quad [\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta]$$

$$= \frac{10-6+4}{\sqrt{29}} = \frac{8}{\sqrt{29}} \text{ (Ans.)}$$

(ii) $\vec{A}$ বরাবর $\vec{B}$ এর উপাংশ বা অংশক

$$= B\cos\theta\,\hat{a}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{29}} \cdot \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{29}} \times \frac{2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}}{\sqrt{29}}$$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

$= \frac{8}{29}(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$ (Ans.)

Shortcut : যার লম্ব অভিক্ষেপ তার $\cos\theta$

ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন

দুইটি ভেক্টর রাশি গুণ করে একটি ভেক্টর রাশি পাওয়া গেলে এই গুণন পদ্ধতিকে বলা হয় ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন।

মনে করি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর ক্রস গুণনে $\vec{C}$ ভেক্টর পাওয়া যায়।

$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$

$AB\sin\theta\, \hat{n} = \vec{C}$

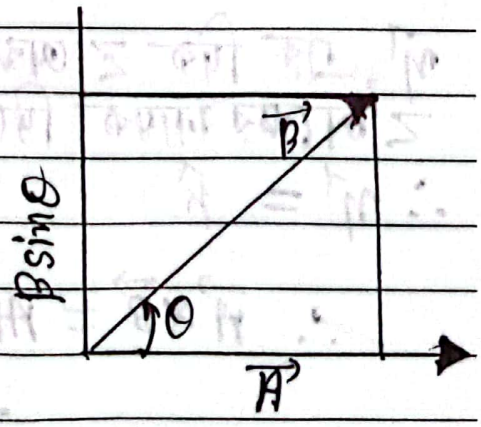
এখানে $\theta = \vec{A} \wedge \vec{B}$

$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{C}| = AB\sin\theta$

$\hat{n} \rightarrow \vec{C}$ ভেক্টরের দিক যা একটি একক ভেক্টর।

তাই $\hat{n} = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$

$|\vec{A} \times \vec{B}| = \vec{A}$ এর মান এবং $\vec{A}$ ভেক্টরের লম্বদিক বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ।



JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

ক্রস গুণফলের মান = যেকোনো একটি ভেক্টরের মান এবং সেই ভেক্টরের লম্ব দিক বরাবর অপর ভেক্টরটির লম্ব অভিক্ষেপের গুণফল।

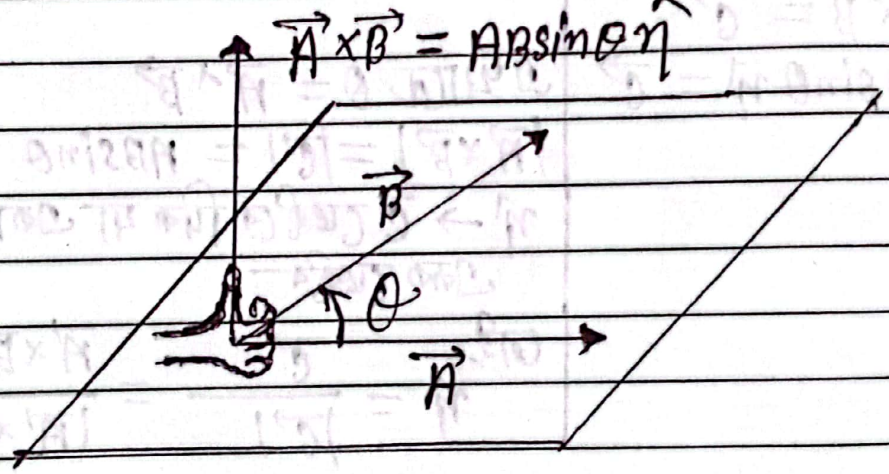
ক্রস গুণফলে প্রাপ্ত ভেক্টরের দিক নির্ণয়

ক্রস গুণফলের দিক ভেক্টরদ্বয় যে তলে অবস্থিত সেই তলের লম্ব বরাবর।

ক্রস গুণফলের দিক নির্ণয়ের দুটি পদ্ধতি নিম্নরূপ:

① Right Hand Thumb Rule.

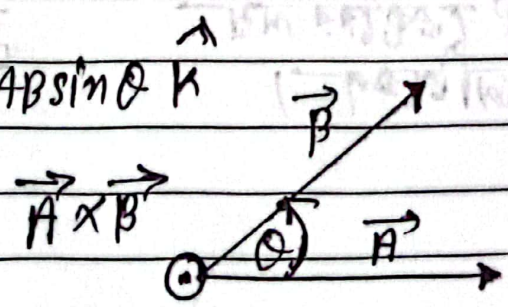
$\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{n}$



$\hat{n}$ এর দিক z অক্ষ বরাবর উপরের দিকে বা z অক্ষের ধনাত্মক দিকে।

$\therefore \hat{n} = \hat{k}$

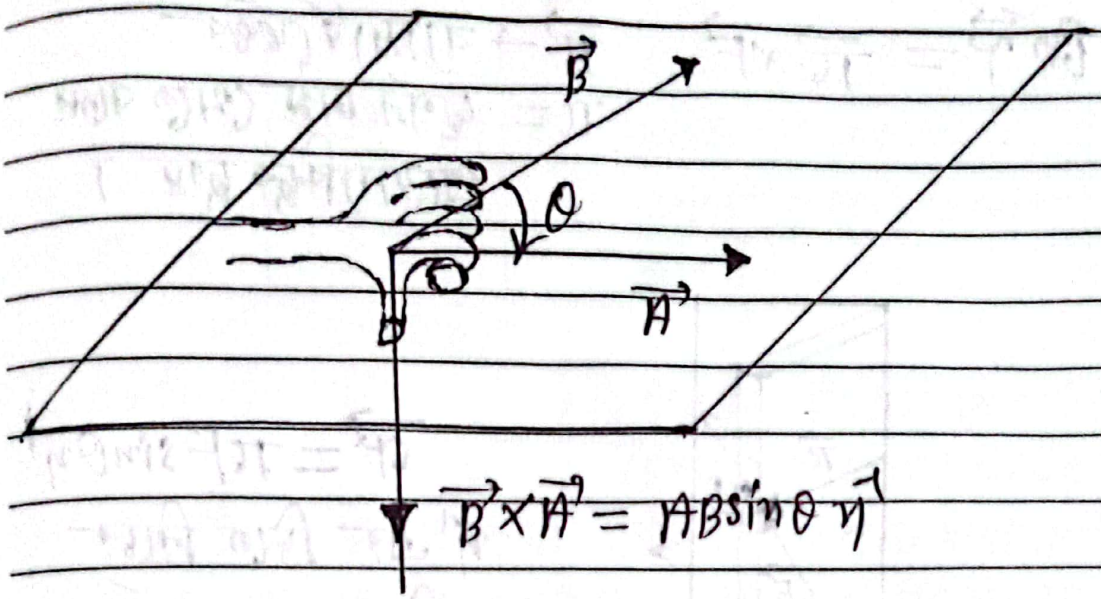
$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{k}$



JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

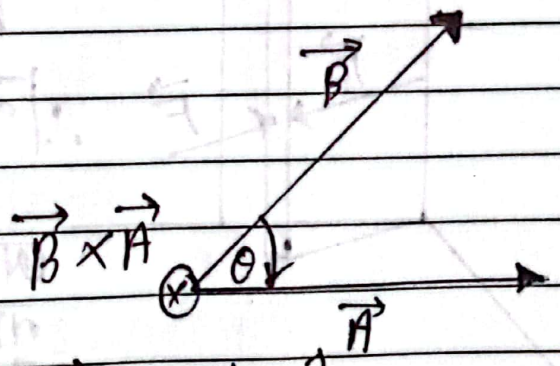


$$\vec{B}\times\vec{A} = AB\sin\theta\,\hat{n}$$

$\hat{n}$ এর দিক z অক্ষ বরাবর নিচের দিকে বা z অক্ষের ঋণাত্মক দিকে

$$\therefore \hat{n} = -\hat{k}$$

$$\therefore \vec{B}\times\vec{A} = -AB\sin\theta\,\hat{k}$$



$$\vec{B}\times\vec{A} = -AB\sin\theta\,\hat{k}$$

(ii) ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম

ভেক্টরের ক্রস গুণনের বাস্তবিক প্রয়োগ

Next Page.

JANANI

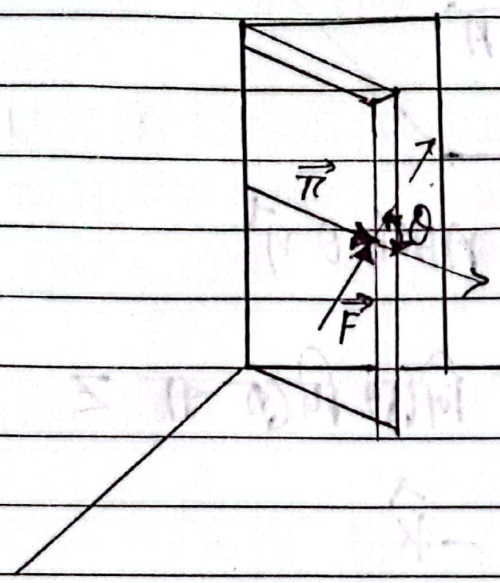
Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

টর্ক বা বলের ভ্রামক বা ঘূর্ণনপ্রবণতা

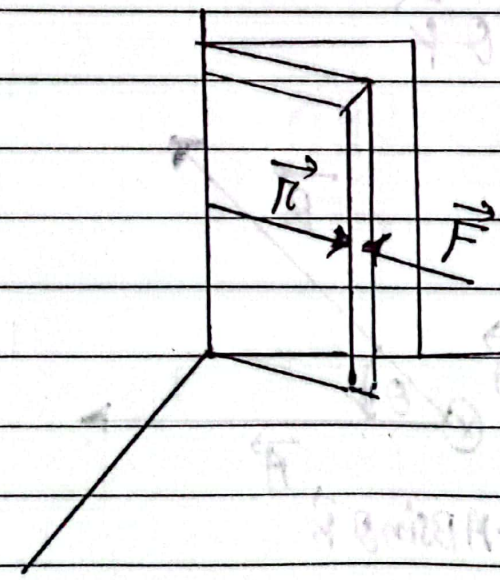
$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ $\vec{r}$ → ব্যাসার্ধ ভেক্টর

r = ঘূর্ণন অক্ষ থেকে বলের প্রয়োগবিন্দুর দূরত্ব।



$\vec{\tau} = rF\sin\theta\, \hat{n}$

$\hat{n}$ এর দিকে নিচের দিকে হবে অর্থাৎ দরজাটি ঘুরে নিচে নামবে এবং দরজা খুলবে।



$\vec{r} \wedge \vec{F} = 180°$

$\therefore |\vec{\tau}| = rF\sin 180°$

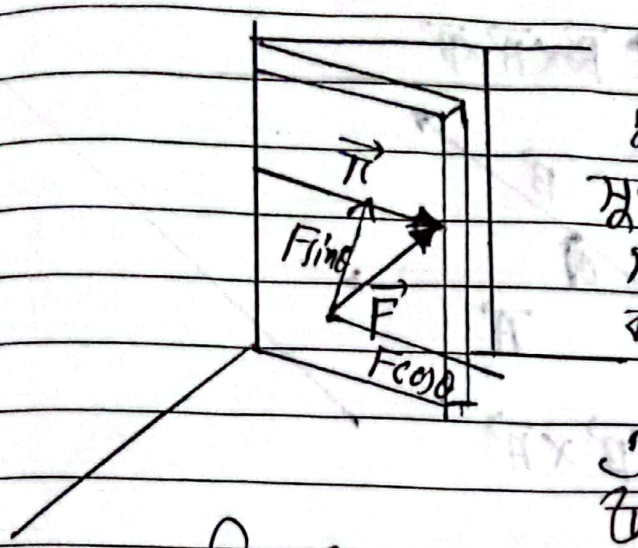
$= 0$

অর্থাৎ দরজাটি খুলবে না।

টর্কের মান 0 হলে বস্তু ঘুরতে পারে না।

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....



মনে করি, $\vec{r} \wedge \vec{F} = \theta$.
সুতরাং $\vec{F}$ অনুভূমিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

এখানে, $\vec{F}$ এর দুটি উপাংশ। যথা: $F\cos\theta$ অনুভূমিক উপাংশ যা দরজাকে ঘুরাতে সাহায্য করে না এবং উলম্ব উপাংশ $F\sin\theta$ যা দরজাকে ঘোরায়।

তাই ক্রস গুণফলে ১ম ভেক্টরের লম্ব দিক বরাবর ২য় ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ নেয়া হয়।

উপরের উদাহরণে: $\vec{r} \rightarrow$ ১ম ভেক্টর
$\vec{F} \rightarrow$ ২য় ভেক্টর

ক্রস গুণনের বৈশিষ্ট্য

১) ক্রস গুণন বিনিময় সূত্র মানে না।

$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$

Prove:

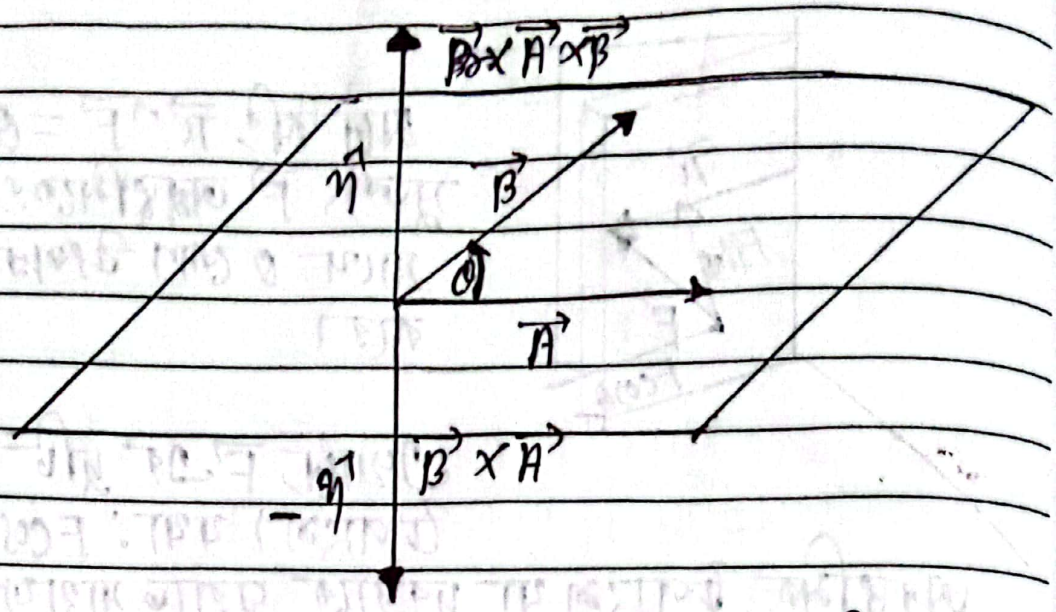
L.S.H $= \vec{A} \times \vec{B}$
$= AB\sin\theta\,\hat{n}$

R.H.S $= \vec{B} \times \vec{A}$
$\vec{B} \times \vec{A} = AB\sin\theta\,\hat{n}$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....



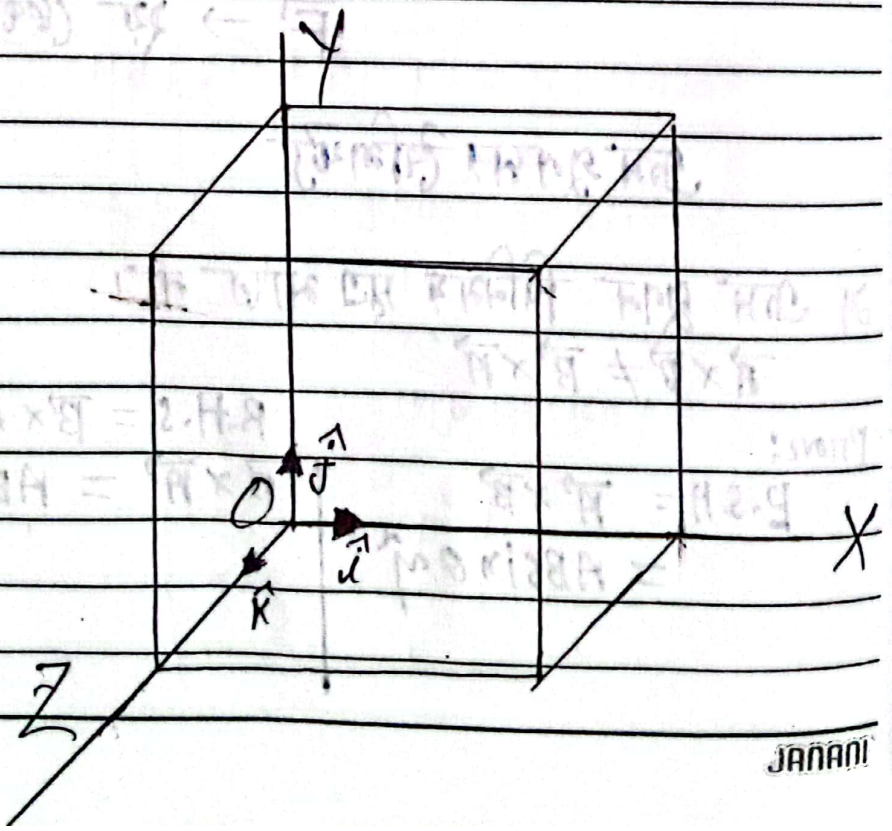
$\vec{A}\times\vec{B}$ এর দিক $\hat{n}$ হলে $\vec{B}\times\vec{A}$ এর দিক $-\hat{n}$

$\therefore$ $\vec{A}\times\vec{B}$ এর এবং $\vec{B}\times\vec{A}$ এর মান সমান হলেও দিক ভিন্ন।

তাই, $\vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{B}\times\vec{A}$

তবে $\vec{A}\times\vec{B} = -(\vec{B}\times\vec{A})$

(ii)



JANANI

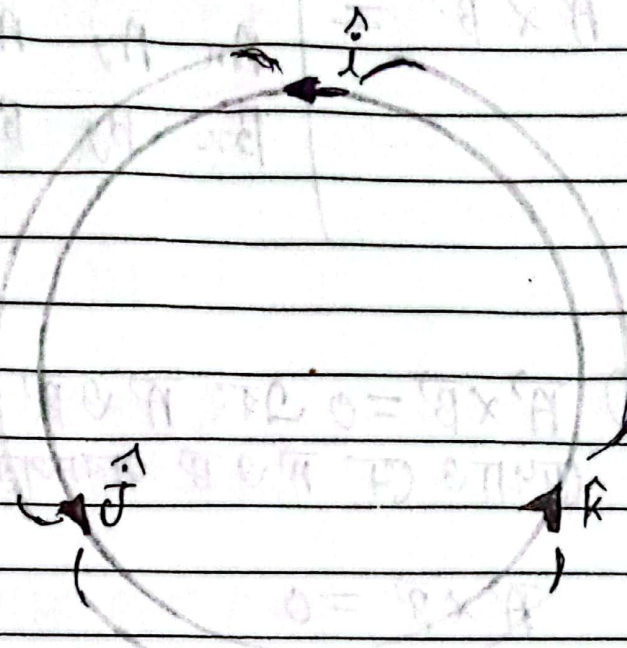
Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

$\hat{i} \times \hat{i} = 1.1 \sin 0 = 0$

$\hat{j} \times \hat{j} = 0$

$\hat{k} \times \hat{k} = 0$



$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$

$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$

$\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

$\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$

$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$

(iii) $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= A_xB_x(\hat{i}\times\hat{i}) + A_xB_y(\hat{i}\times\hat{j}) + A_xB_z(\hat{i}\times\hat{k})$$
$$+ A_yB_x(\hat{j}\times\hat{i}) + A_yB_y(\hat{j}\times\hat{j}) + A_yB_z(\hat{j}\times\hat{k})$$
$$+ A_zB_x(\hat{k}\times\hat{i}) + A_zB_y(\hat{k}\times\hat{j}) + A_zB_z(\hat{k}\times\hat{k})$$

$$= 0 + A_xB_y\hat{k} - A_xB_z\hat{j} - A_yB_x\hat{k} + 0$$
$$+ A_yB_z\hat{i} + A_zB_x\hat{j} - A_zB_y\hat{i} + 0$$

$$= \hat{i}(A_yB_z - A_zB_y) - \hat{j}(A_xB_z - A_zB_x)$$
$$+ \hat{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

(iv) $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ এবং $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ null ভেক্টর না হলে দেখাও যে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল।

$\vec{A} \times \vec{B} = 0$

$\Rightarrow AB\sin\theta\,\hat{n} = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = 0$ $\quad A \neq 0, B \neq 0$

$\Rightarrow \theta = 0^\circ$

$\therefore \vec{A} \wedge \vec{B} = 0^\circ$ যার অর্থ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

সমস্যা ও সমাধান

Pbm→01: $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{B} = 4\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{A} \times \vec{B}$ নির্ণয় কর এবং এর মান নির্ণয় কর।

Soln: $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

$\Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = -7\hat{i} + 10\hat{j} + 8\hat{k}$

এবং $|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(-7)^2 + 10^2 + 8^2}$

$= \sqrt{213}$

Pbm→02: $\vec{A} = \hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{B} = p\hat{i} - 10\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ সমান্তরাল হলে $p = ?$

Solⁿ: $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -5 & 2 \\ p & -10 & 4 \end{vmatrix}$

$= -\hat{j}(4-2p) + \hat{k}(-10+5p)$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ সমান্তরাল হলে $\vec{A} \times \vec{B} = 0$

$\Rightarrow -\hat{j}(4-2p) + \hat{k}(-10+5p) = 0$

$\Rightarrow -\hat{j}(4-2p) + \hat{k}(-10+5p) = 0\hat{j} + 0\hat{k}$

উভয়পক্ষের সহগ সমীকৃত করে পাই,

$-\hat{j}(4-2p) = 0$	$-10 + 5p = 0$
$2p = 4$	$5p = 10$
$p = 2$	$p = 2$ (Ans)

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

Pbm→03: $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$

(i) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লব্ধির সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(ii) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর তলের লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

Solⁿ: i) $\vec{A} + \vec{B} = 5\hat{i} + 6\hat{j} + \hat{k}$

ধরি, $\vec{A} + \vec{B} = \vec{R}$

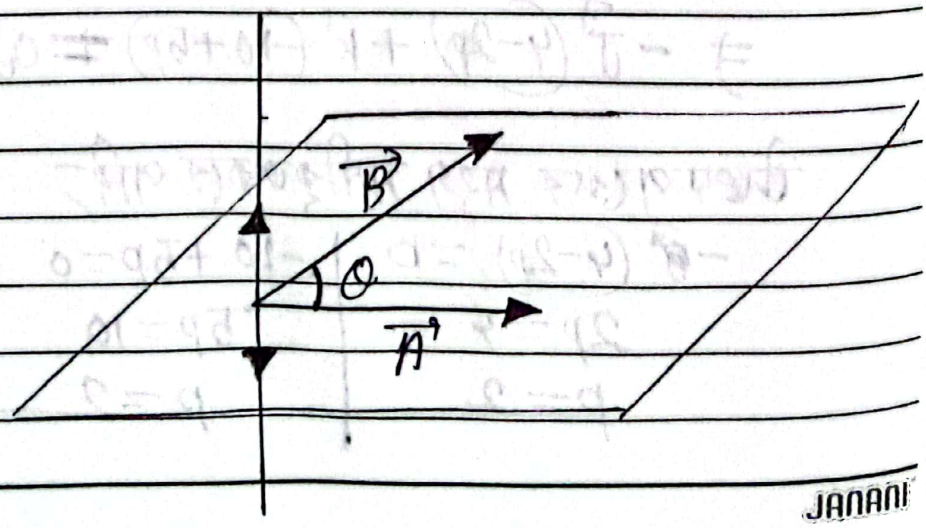
$\therefore \vec{R} = 5\hat{i} + 6\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{R}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর, $\hat{r} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$

$= \frac{5\hat{i} + 6\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{5^2 + 6^2 + 1^2}}$

$= \frac{5\hat{i} + 6\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{62}}$ (Ans.)

(ii)



JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

মনে করি, $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{C} = 8\hat{i} + 8\hat{j} + 8\hat{k}$$

$\vec{C}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর, $\hat{C} = \pm \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|}$

$$\hat{C} = \pm \frac{8\hat{i} + 8\hat{j} + 8\hat{k}}{\sqrt{3 \times 64}}$$

$$\Rightarrow \hat{C} = \pm \frac{8}{8\sqrt{3}} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

$$\Rightarrow \hat{C} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

Ans!

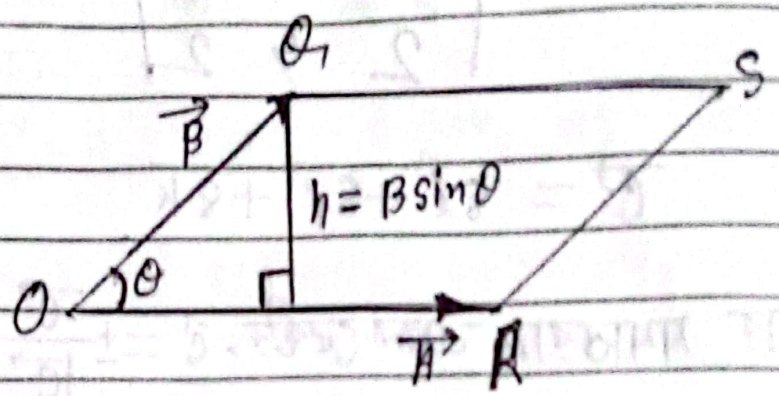
Shortcut: $A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ এবং $B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল হলে, $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

ক্রস গুণনের সাহায্যে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয়

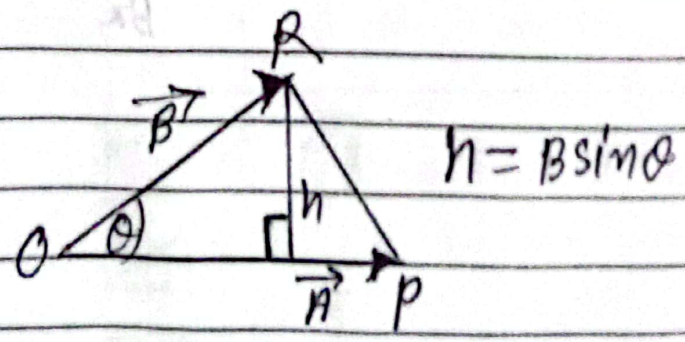


সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা
$= OR \times h$
$= |\vec{A}|\, B\sin\theta$
$= AB\sin\theta$
$= |\vec{A} \times \vec{B}|$

$\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta\, \hat{n}$
$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sin\theta$

* সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{A} \times \vec{B}|$; যেখানে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দ্বারা কোনো সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশিত হয়।

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়



Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2} op \times h$

$= \frac{1}{2} |\vec{A}| B\sin\theta$

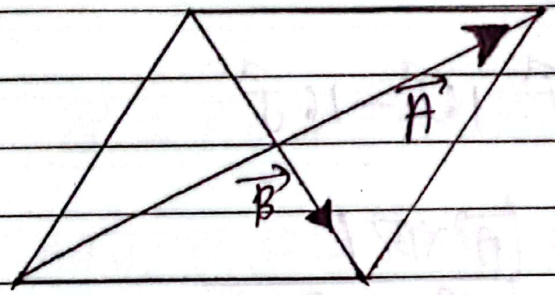
$= \frac{1}{2} AB\sin\theta$

$= \frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}|$

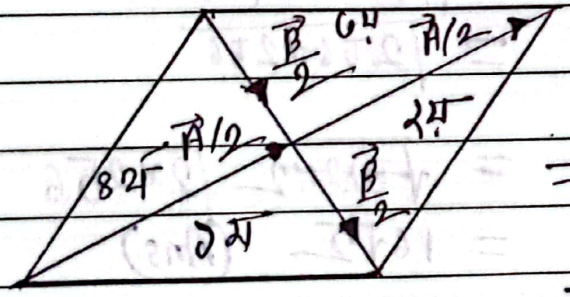
$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sin\theta$

* $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টর দ্বারা কোনো ত্রিভুজের দুইটি সন্নিহিত নির্দেশ করলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}|$

* $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ কোনো সামান্তরিকের কর্ণ নির্দেশ করলে ঐ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}|$



সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



১ম অংশের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \left|\frac{\vec{A}}{2} \times \frac{\vec{B}}{2}\right|$

$= \frac{1}{8} |\vec{A} \times \vec{B}|$

২য় অংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \left|\frac{\vec{A}}{2} \times \frac{\vec{B}}{2}\right| = \frac{1}{8} |\vec{A} \times \vec{B}|$

৩য় " " $= \frac{1}{8} |\vec{A} \times \vec{B}|$

৪র্থ " " $= \frac{1}{8} |\vec{A} \times \vec{B}|$

$\therefore$ মোট ক্ষেত্রফল $= 4 \cdot \frac{1}{8} |\vec{A} \times \vec{B}| = \frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}|$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

সমস্যা ও সমাধান

Pbm→01: একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু $2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ এবং $4\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}$ হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Soln: ধরি, $\vec{A} = 2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$

$\vec{B} = 4\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \cancel{-8\vec{i}-16\vec{j}}\ 16\vec{i}-16\vec{j}$$

$\therefore$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{A}\times\vec{B}|$

$= \sqrt{16^2+(-16)^2}$

$= \sqrt{256+256}$

$= \cancel{\sqrt{512\times2}}\ \sqrt{2\times256}$

$= 16\sqrt{2}$ (Ans.)

Pbm→02: একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $A(2,-3,4)$; $B(1,2,-5)$ এবং $C(3,3,-2)$

(i) $\angle BAC$ নির্ণয় কর

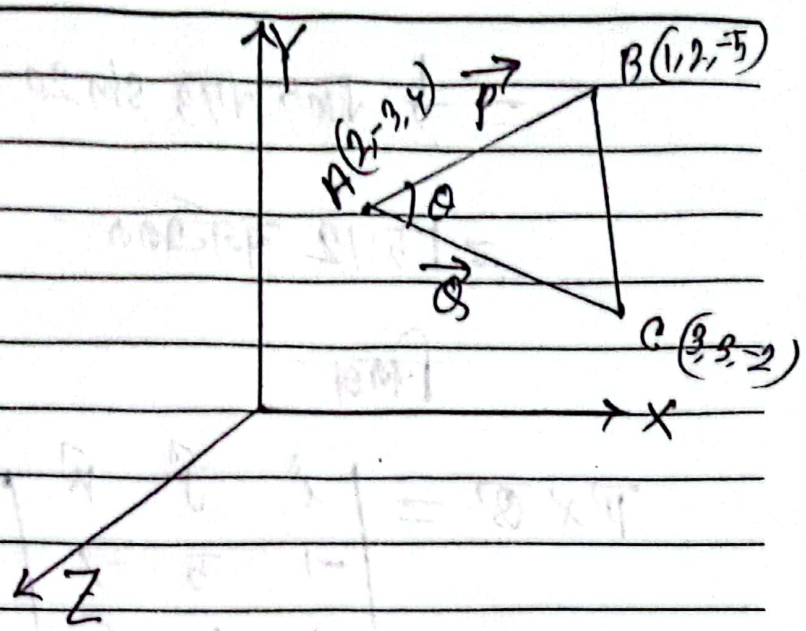
(ii) $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

Solⁿ : (i)



$\vec{P} = \vec{AB} = (1-2)\hat{i} + (2+3)\hat{j} + (-5-4)\hat{k}$

$\vec{P} = -\hat{i} + 5\hat{j} - 9\hat{k}$

$\vec{Q} = \vec{AC} = \hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k}$

এখন, $\vec{P}\cdot\vec{Q} = PQ\cos\theta$

$\theta = \cos^{-1}\dfrac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{PQ} = \dfrac{-1+30+54}{\sqrt{(-1)^2+5^2+(-9)^2}\sqrt{1^2+6^2+6^2}}$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\dfrac{83}{\sqrt{107}\sqrt{73}}$

$\Rightarrow \theta = 20.09°$

$\therefore \angle BAC = 20.09°$

(ii) ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{P}\times\vec{Q}|$

$= \frac{1}{2}PQ\sin 20.09°$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

$= \frac{1}{2}\sqrt{107}\sqrt{73}\sin 20.09^\circ$

$= 15.12$ বর্গএকক

বিকল্প

$$\vec{p}\times\vec{q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 5 & -9 \\ 1 & 6 & -6 \end{vmatrix}$$

$= \cancel{24\hat{i} - 3\hat{j} - 11\hat{k} + 15\hat{j}}$

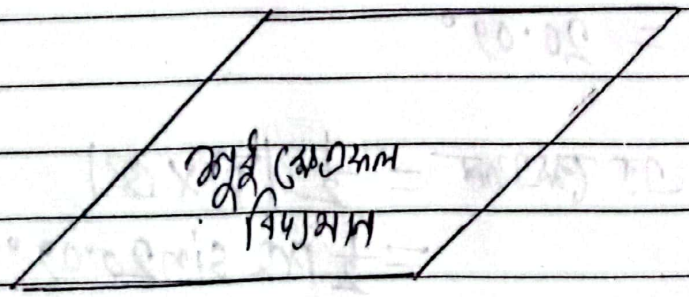
$= 24\hat{i} - 15\hat{j} + 11\hat{k}$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{p}\times\vec{q}|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{24^2 + 15^2 + 11^2}$

$= 15.18$ বর্গএকক।

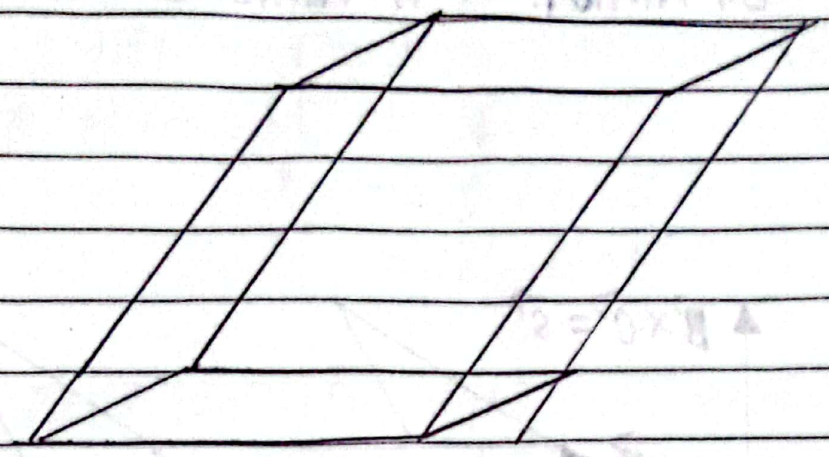
ঘন সামান্তরিক বা ঘ সামান্তরিকের আয়তন নির্ণয়



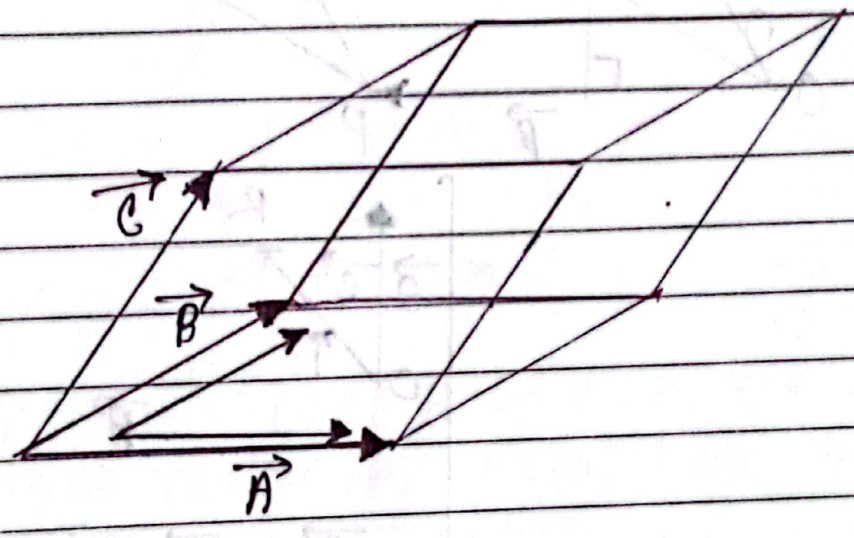
JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....



ঘন সামান্তরিক

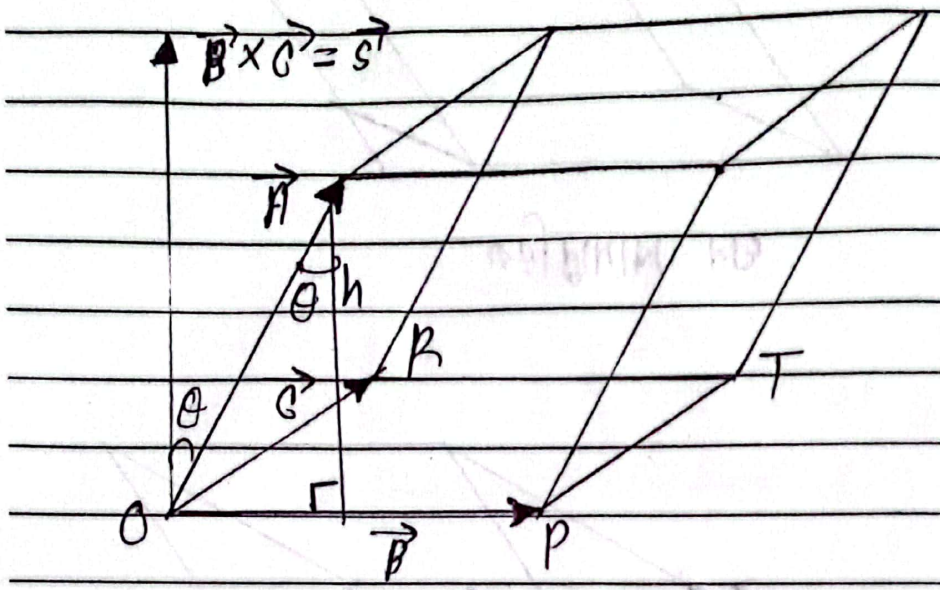


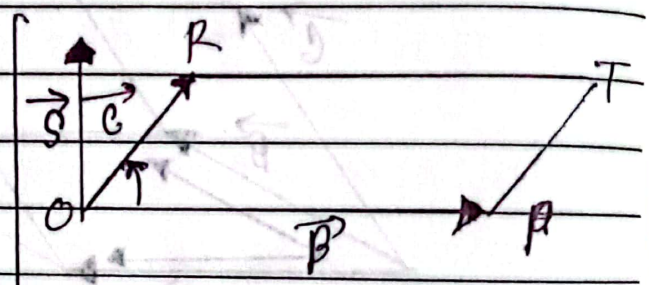
JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

ঘন সামান্তরিক বা সামান্তরকের আয়তন নির্ণয়—





$\vec{S} = \vec{B}\times\vec{C}$

$|\vec{S}| = |\vec{B}\times\vec{C}| =$ ORPT এর ক্ষেত্রফল

ঘন সামান্তরিকের আয়তন = উচ্চতা × OPRT তলের ক্ষেত্রফল

$= hS$

$= h A\cos\theta \cdot S$

$= AS\cos\theta$

$= \vec{A}\cdot\vec{S}$

$= \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

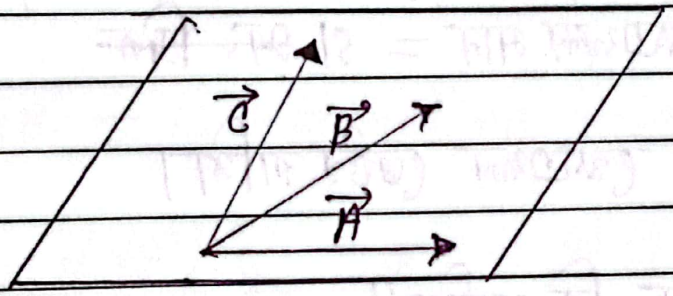
* $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ভেক্টর তিনটি কোনো ঘন সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত হলে, ঘন সামান্তরিকের ~~A~~ ~~C~~ আয়তন $= \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$

$$= \vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{C})$$

$$= \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$

* $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ভেক্টর তিনটি একই তলে ক্রিয়া করলে এদের দ্বারা গঠিত ঘন সামান্তরিকের উচ্চতা 0 হবে ফলে আয়তনও 0 হবে।

$$\therefore \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$$



অনুসিদ্ধান্ত : তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হবে যদি তাদের যেকোনো দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণফলের সাথে অপর ভেক্টরের ডট গুণফল শূন্য (0) হয়।

(?) $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ এর অর্থ কি?

⇒ (i) $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ এর ক্রস গুণফলে প্রাপ্ত ভেক্টরের সাথে $\vec{A}$ ভেক্টরটি লম্ব দিকে থাকবে।

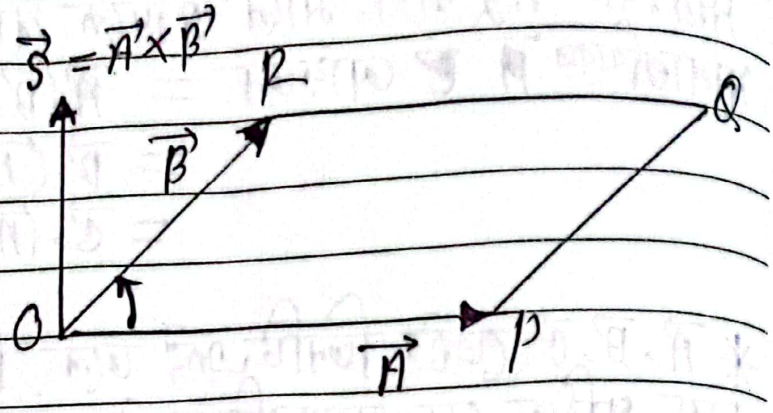
(ii) ভেক্টর তিনটি সমতলীয়। ~~অর্থাৎ~~ অর্থাৎ এদের দ্বারা গঠিত ঘন সামান্তরিকের আয়তন শূন্য।

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

? ক্ষেত্রফল কি রাশি ?



তলটি একটি সামান্তরিক যার ক্ষেত্রফলের মান = $|\vec{A} \times \vec{B}|$
কিন্তু $\vec{A} \times \vec{B}$ থেকে $\vec{S}$ ভেক্টর পাওয়া গেলে $\vec{S}$ এর দিক হবে OPQR তলের লম্ব বরাবর। তাই OPQR তলের ক্ষেত্রফলের মান = S। ~~এবং দিক~~

সুতরাং ক্ষেত্রফল ভেক্টর রাশি।

? আয়তন কি রাশি ?

মনে করি, একটি ঘন সামান্তরিকের $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টর তিনটি সন্নিহিত বাহুকে নির্দেশ করে।

∴ সামান্তরিকের ~~ক্ষেত্রফল~~ আয়তন = $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$

ধরি, $\vec{B} \times \vec{C}$ হতে প্রাপ্ত ভেক্টর $\vec{S}$

∴ সামান্তরিকের আয়তন = $\vec{A} \cdot \vec{S}$
এবং দুটি রাশির ডট গুণফলে স্কেলার মান পাওয়া যায়। তাই আয়তন স্কেলার রাশি।

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

সমস্যা ও সমাধান

Pbm→01: $\vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + a\hat{k}$

$\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{C} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

ভেক্টরত্রয় সমতলীয় হলে a এর মান নির্ণয় কর।

Solⁿ:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -4 & a \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (a+4)\hat{i} - \hat{j}(3-2a) + 5\hat{k}$$

এখন $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = a - 4 + 2\{-(3-2a)\} + (-3) \times 5$

$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot C = a - 4 - 6 + 4a - 15$

$= 5a - 25$

∵ $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টরত্রয় সমতলীয়।

∴ $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = 0$

$\Rightarrow 5a - 25 = 0$

$\Rightarrow a = 5$ (Ans.)

Shortcut: $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

ভেক্টরত্রয় সমতলীয় হলে

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = 0$$

উপরের সমাধানটি এ পদ্ধতিতে

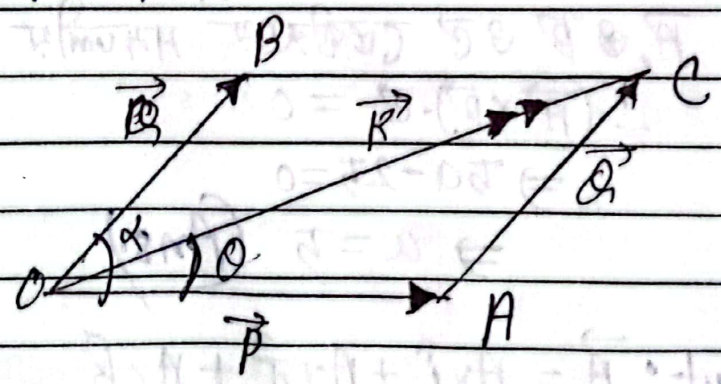
$$\begin{vmatrix} 3, & -4 & a \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 3 - 28 + a \times 5 = 0$

$\Rightarrow 5a = 25$

$\Rightarrow a = 5$ (Ans.)

Topic : ~~উভ~~ ডট ও ক্রস গুণনের মাধ্যমে কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টরের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয়।



$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$

$\Rightarrow \vec{R} \cdot \vec{R} = (\vec{P} + \vec{Q}) \cdot \vec{R}$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

$\Rightarrow RR\cos\theta = (\vec{P}+\vec{Q}).(\vec{P}+\vec{Q})$

$\Rightarrow R^2 = \vec{P}.\vec{P} + \vec{P}.\vec{Q} + \vec{Q}.\vec{P} + \vec{Q}.\vec{Q}$

$= P^2 + PQ\cos\alpha + PQ\cos\alpha + Q^2$

$\Rightarrow R^2 = P^2 + 2PQ\cos\alpha + Q^2$

$\Rightarrow R = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}$

আবার, $\vec{R} = \vec{P}+\vec{Q}$

$\Rightarrow \vec{R}\times\vec{P} = (\vec{P}+\vec{Q})\times\vec{P}$

$\Rightarrow \cancel{RP\cos\theta}\ RP\sin\theta\,\hat{n} = \vec{P}\times\vec{P} + \vec{P}\times\vec{Q}$

$\Rightarrow RP\sin\theta\,\hat{n} = 0 + PQ\sin\alpha\,\hat{n}$

$\Rightarrow RP\sin\theta = PQ\sin\alpha$

$\Rightarrow R\sin\theta = Q\sin\alpha$ —(i)

এবং $\vec{R} = \vec{P}+\vec{Q}$

$\Rightarrow \vec{R}.\vec{P} = \vec{P}.\vec{P} + \vec{Q}.\vec{P}$

$\Rightarrow RP\cos\theta = P^2 + PQ\cos\alpha$

$\Rightarrow R\cos\theta = P + Q\cos\alpha$ —(ii)

(i) ÷ (ii) $\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$

সমস্যা ও সমাধান

Pbm→01: এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা xy তলের সমান্তরাল এবং যা $2\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k}$ ভেক্টরের উপর লম্ব।

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

Solⁿ: মনে করি, একক ভেক্টরটি, $\vec{A} = a\hat{i} + b\hat{j}$

এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর লম্ব হওয়ায়,

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

$\Rightarrow 2a - 2b = 0$

$\Rightarrow a = b$

এখন $\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{a\hat{i} + b\hat{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\Rightarrow \hat{a} = \frac{a\hat{i} + a\hat{j}}{\sqrt{2a^2}}$

$\Rightarrow \hat{a} = \frac{a(\hat{i} + \hat{j})}{\sqrt{2}a}$

$\Rightarrow \hat{a} = \frac{\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{2}}$ (Ans.)

Pbⁿ→02: দেখাও যে,

(i) $(\vec{A} \cdot \vec{B})^2 + |\vec{A} \times \vec{B}|^2 = A^2B^2$

(ii) $(\vec{A} \cdot \vec{B})^2 - |\vec{A} \times \vec{B}|^2 = A^2B^2\cos 2\theta$

Solⁿ: (i) L.H.S $= (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 + |\vec{A} \times \vec{B}|^2$

$= (AB\cos\theta)^2 + (AB\sin\theta)^2$

$= A^2B^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$= A^2B^2$

$=$ R.H.S.

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

(ii) $L.H.S = (\vec{A}\cdot\vec{B})^2 - |\vec{A}\times\vec{B}|^2 \cancel{= A^2B^2\cos 2\theta}$

$= (AB\cos\theta)^2 - (AB\sin\theta)^2$

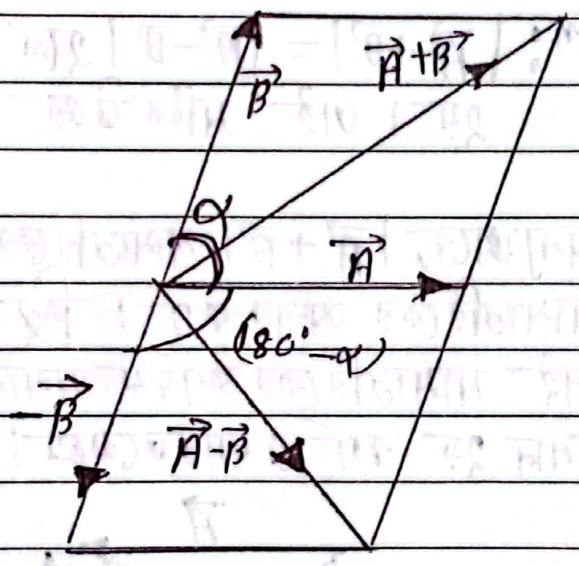
$= A^2B^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$= A^2B^2\cos 2\theta$

$= R.H.S.$

Pbm→03: $|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}-\vec{B}|$ হলে দেখাও যে $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ পরস্পর লম্ব।

Solⁿ: [$\vec{A}-\vec{B}$ বলতে বোঝায় $\vec{A}$ এর সাথে $\vec{B}$ এর বিপরীত-বিপরীত ভেক্টরের লব্ধি]



দেওয়া আছে $|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}-\vec{B}|$

$\Rightarrow |\vec{A}+\vec{B}|^2 = |\vec{A}-\vec{B}|^2$

$\Rightarrow A^2+B^2+2AB\cos\alpha = A^2+B^2+2AB\cos(\pi-\alpha)$

$\Rightarrow 2AB\cos\alpha = -2AB\cos\alpha$

$\Rightarrow 4AB\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = 0$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

$\Rightarrow \alpha = 90^\circ$

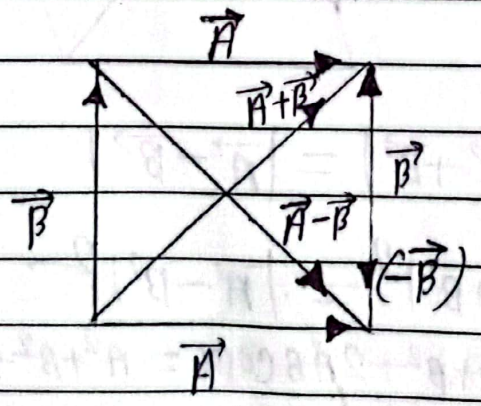
সুতরাং $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর পরস্পর লম্ব।

Pbm→04: $|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}-\vec{B}|$ হলে এবং $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ কোনো সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু হলে সামান্তরিকটি —

(i) বর্গ
(ii) রম্বস
(iii) আয়ত
(iv) ট্রাপিজিয়াম।

Solⁿ: $|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}-\vec{B}|$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর লম্ব হয়। তাই সঠিক উত্তর (i) ও (iii)

অন্যভাবে, $|\vec{A}+\vec{B}|$ সামান্তরিকের একটি কর্ণ এবং $|\vec{A}-\vec{B}|$ সামান্তরিকের অপর কর্ণ। কিন্তু $|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}-\vec{B}|$ তাই সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সমান। সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সমান হয় বর্গ ও আয়তক্ষেত্রে।



Pbm→05: $|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}-\vec{B}|$ হলে এবং $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ কোনো

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

সামান্তরিকের কর্ণ নির্দেশ করলে সামান্তরিকটি

(i) বর্গ
(ii) আয়ত
(iii) রম্বস
(iv) ট্রাপিজিয়াম

Solⁿ: আমরা জানি $|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}-\vec{B}|$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর লম্ব।

সুতরাং প্রদত্ত সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে। তাই সামান্তরিকটি বর্গ বা রম্বস।

* বর্গের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব
* রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব।

Pbⁿ→06: $2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ এবং $3\hat{i}-2\hat{j}$ ভেক্টরদ্বয়ের সাথে কত মানের এবং কোন ভেক্টরের ক্রিয়ার লব্ধি +x অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর হবে?

Solⁿ: মনে করি, ভেক্টরটি $\vec{C}$

এবং $\vec{A} = 2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$

$\vec{B} = 3\hat{i}-2\hat{j}$

x অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর একক ভেক্টর $= \hat{i}$

$\therefore \vec{A}+\vec{B}+\vec{C} = \hat{i}$

$\Rightarrow 2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}+3\hat{i}-2\hat{j}+\vec{C} = \hat{i}$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

$\Rightarrow \vec{c} = -4\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ (Ans.)

$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 4^2}$
$= \sqrt{41}$

Vector Operator

অপারেটর : অপারেটর হচ্ছে একটি গাণিতিক রাশি যা একটি ফাংশনের উপর প্রযুক্ত হয়ে তাকে অন্য ফাংশনে পরিণত করে।

৮ ও ৩ দুটি Number
৮+৩ = ৪, এখানে + চিহ্ন অপারেটর হিসেবে কাজ করেছে।

ভেক্টর অপারেটর : ত্রিমাত্রিক ভৌত রাশির বৈশিষ্ট্য বিশ্লেষণ ও বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের প্রয়োজনে স্যার হেমিল্টন ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটর $\vec{\nabla}$ উদ্ভাবন করেন এবং একে ন্যাবলা নামে অভিহিত করেন। পরবর্তীতে উইলিয়াম গিবস এর নামকরণ করেন 'ডেল'।

ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায়, $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$

এটি কোনো ভেক্টর রাশি নয়। শুধু ভেক্টর অপারেটর মাত্র। তবে এটি ভেক্টরের মতো আচরণ করে।

JANANI

Scanned with CamScanner